MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI KÖZÉPSZINT

Trigonometria

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$$ **(12 pont)**

Megoldás:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x + 4\cos x = 3\left(1-\cos^2 x\right)$ (2+1 pont)

$4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$

A másodfokú egyenlet megoldóképletével megoldva a fenti egyenletet, a gyökök:

$$\cos x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 4\cdot(-3)}}{2\cdot 4}$$

$\cos x = \frac{1}{2}$ vagy $\cos x = -\frac{3}{2}$ (1+1 pont)

Ha $\cos x = \frac{1}{2}$, akkor $\boldsymbol{x_1 = \frac{\pi}{3} + k2\pi}$, $\boldsymbol{x_2 = \frac{5\pi}{3} + k2\pi}$ (3 pont)

ahol $k \in \mathbb{Z}$ (1 pont)

Ha $\cos x = -\frac{3}{2}$, akkor nincs megoldás, hiszen $\cos x \geq -1$, minden x esetén. (2 pont)

Az egyenlet megoldása közben ekvivalens átalakításokat végeztünk, így mindkét gyöksorozat megoldása az eredeti egyenletnek. (1 pont)

Összesen: 12 pont

2) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\boldsymbol{\log_3\left(\sqrt{x+1}+1\right) = 2}$**, ahol** $\boldsymbol{x}$ **valós szám és** $\boldsymbol{x > -1}$ **(6 pont)**

b) $\boldsymbol{2\cos^2 x = 4 - 5\sin x}$**, ahol** $\boldsymbol{x}$ **tetszőleges forgásszöget jelöl** **(11 pont)**

Megoldás:

a) A logaritmus definíciója szerint $\sqrt{x+1}+1 = 3^2$ (2 pont)

$\sqrt{x+1} = 8$ (1 pont)

$x+1 = 64$ (1 pont)

$\boldsymbol{x = 63}$ (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

b) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ helyettesítéssel, (1 pont)
$2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0$ (1 pont)
$\sin x = y$ új változóval $2y^2 - 5y + 2 = 0$. (1 pont)
$y_1 = 2;\ y_2 = \frac{1}{2}$ (2 pont)
y_1 nem megoldás, mert $|\sin x| \le 1$ (1 pont)
$\boldsymbol{x = \frac{1}{6}\pi + k2\pi}$ vagy $\boldsymbol{x = \frac{5}{6}\pi + k2\pi}$ (fokban is megadható) (3 pont)
$k \in \mathbb{Z}$ (1 pont)
Ellenőrzés, vagy le kell írni, hogy a gyökök igazzá teszik az eredeti egyenletet, mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk. (1 pont)

Összesen: 17 pont

3) Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $9^x - 2\cdot 3^x - 3 = 0$ (6 pont)

b) $\sin^2 x = 2\sin x + 3$ (6 pont)

<u>Megoldás</u>:

a) Legyen $3^x = a$
Az $a^2 - 2a - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldani. (1 pont)
Ennek az egyenletnek a gyökei: $a_1 = 3$ és $a_2 = -1$ (1 pont)
$a = 3^x = 3$ esetén $x = 1$ (1 pont)
$a = 3^x = -1$ egyenlet nem ad megoldást, (1 pont)
mert 3 minden valós kitevőjű hatványa pozitív szám. (1 pont)
Az $x = 1$ kielégíti az eredeti egyenletet. (1 pont)

b) Legyen $\sin x = a$
Az $a^2 - 2a - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldani.
Ennek az egyenletnek a gyökei: $a_1 = 3$ és $a_2 = -1$. (1 pont)
$a = \sin x = 3$ nem ad megoldást, (1 pont)
mert $\sin x \le 1$ (1 pont)
$a = \sin x = -1$ (1 pont)
A $\sin x = -1$ egyenlet gyökei: $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$,
ahol k tetszőleges egész szám. (1 pont)
Ezek az x értékek kielégítik az egyenletet. (1 pont)

Összesen: 12 pont

4) Mely valós számokra teljesül a $[0;2\pi]$ intervallumon a $\sin x = \frac{1}{2}$ egyenlőség? (2 pont)

<u>Megoldás</u>:

$\boldsymbol{x_1 = \frac{\pi}{6}}$ (1 pont)

$\boldsymbol{x_2 = \frac{5\pi}{6}}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

5) Adja meg az összes olyan forgásszöget fokokban mérve, amelyre a $k(x)=\frac{5}{\cos x}$ kifejezés nem értelmezhető! Indokolja a válaszát! (3 pont)

Megoldás:

A kifejezés nem értelmezhető, ha

$x=90^\circ+n\cdot 180^\circ,\ n\in\mathbb{Z}$ (3 pont)

6) Határozza meg az alábbi egyenletek valós megoldásait!

a) $(\log_2 x-3)\cdot(\log_2 x^2+6)=0$ (7 pont)

b) $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$ (10 pont)

Megoldás:

a) Az egyenlet bal oldalán szereplő szorzat értéke pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. (1 pont)

Ha az első tényező 0, akkor $\log_2=3$ (1 pont)

Innen $x_1=2^3=8$ (1 pont)

Ha a második tényező 0, akkor $\log_2 x^2=-6$ (1 pont)

Innen $x^2=2^{-6}=\frac{1}{64}$ (1 pont)

ahonnan a pozitív tartományba csak az $x_2=\frac{1}{8}$ (1 pont)

Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet. (1 pont)

b) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ vagy $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ (2 pont)

$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2n\pi$ vagy $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2n\pi$ (2 pont)

$x-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2n\pi$ vagy $x-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}+2n\pi$ (2 pont)

$x_1=\frac{\pi}{3}+2n\pi$; $x_2=2n\pi$; $x_3=\pi+2n\pi$; $x_4=\frac{4\pi}{3}+2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$ (4 pont)

Összesen: 17 pont

7) Döntse el az alábbi két állítás mindegyikéről, hogy igaz vagy hamis! (2 pont)

a) Az $x\mapsto\sin x\,(x\in\mathbb{R})$ függvény periódusa 2π.

b) Az $x\mapsto\sin(2x)\,(x\in\mathbb{R})$ függvény periódusa 2π.

Megoldás:

a) **igaz** (1 pont)

b) **hamis** (1 pont)

Összesen: 2 pont

8) Oldja meg a valós számok halmazán a $\sin x = 0$ egyenletet, ha $-2\pi \le x \le 2\pi$ **(3 pont)**

Megoldás:

A megoldások: $-2\pi; \pi; 0; \pi; 2\pi$. (3 pont)

9) Döntse el az alábbi négy állításról, hogy melyik igaz, illetve hamis!
A: Van olyan derékszögű háromszög, amelyben az egyik hegyesszög szinusza $\frac{1}{2}$ **(1 pont)**
B: Ha egy háromszög egyik hegyesszögének szinusza $\frac{1}{2}$, akkor a háromszög derékszögű. **(1 pont)**
C: A derékszögű háromszögnek van olyan szöge, amelynek nincs tangense. **(1 pont)**
D: A derékszögű háromszögek bármelyik szögének értelmezzük a koszinuszát. **(1 pont)**

Megoldás:

A: **igaz** (1 pont)
B: **hamis** (1 pont)
C: **igaz** (1 pont)
D: **igaz** (1 pont)
Összesen: 4 pont

10) Melyik szám nagyobb?

$$A = \lg\frac{1}{10} \text{ vagy } B = \cos 8\pi$$ **(2 pont)**

Megoldás:

A nagyobb szám betűjele: **B** $(=\cos 8\pi)$ (2 pont)

11) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!
a) $5 - x = \sqrt{2x^2 - 71}$ **(6 pont)**
b) $\sin^2 x = 1 + 2\cos x$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) A négyzetgyök értéke csak nemnegatív lehet: $x \le 5$. (1 pont)
és csak nemnegatív számnak van négyzetgyöke: $|x| \le \sqrt{35,5}$ (1 pont)
Négyzetre emelve: $x^2 - 10x + 25 = 2x^2 - 71$. (1 pont)
Rendezve: $x^2 + 10x - 96 = 0$ (1 pont)
amelynek valós gyökei a -16 és a 6. (1 pont)
Az utóbbi nem felel meg az első feltételnek, ezért nem megoldása az egyenletnek Az egyenlet egyetlen megoldása a **–16**, hiszen ez mindkét feltételnek megfelel, s az adott feltételek mellett csak ekvivalens átalakításokat végeztünk. (1 pont)

b) A baloldalon a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ helyettesítést elvégezve kapjuk:
$1 - \cos^2 x = 1 + 2\cos x$ (1 pont)
$\cos^2 x + 2\cos x = 0$ (1 pont)
$\cos x(\cos x + 2) = 0$ (1 pont)

Ha $\cos x = 0$, akkor $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$, ahol $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$. (2 pont)
A $\cos x + 2 = 0$ egyenletnek nincs megoldása (mert $\cos x = -2$ nem lehetséges). (1 pont)

Összesen: 12 pont

12) Határozza meg a radiánban megadott $\alpha = \frac{\pi}{4}$ szög nagyságát fokban!

(2 pont)

***Megoldás*:**

$\alpha = \mathbf{45}^\circ$ (2 pont)

13)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az $\frac{x+2}{3-x} \geq 0$ egyenlőtlenséget!

(7 pont)

b) Adja meg az x négy tizedesjegyre kerekített értékét, ha $4 \cdot 3^x + 3^x = 20$. (4 pont)

c) Oldja meg a $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ egyenletet a $[-\pi; \pi]$ alaphalmazon. (6 pont)

***Megoldás*:**

a) Ha $x < 3$, akkor ($3 - x > 0$, ezért) $x + 2 \geq 0$, vagyis $x \geq -2$. (2 pont)
A 3-nál kisebb számok halmazán tehát a $[-2; 3[$ intervallum minden eleme megoldása az egyenlőtlenségnek. (1 pont)
Ha $x > 3$, akkor ($3 - x < 0$, ezért) $x + 2 \leq 0$, vagyis $x \leq -2$. (2 pont)
A 3-nál nagyobb számok halmazában nincs ilyen elem, tehát a 3-nál nagyobb számok között nincs megoldása az egyenlőtlenségnek. (1 pont)
A megoldáshalmaz: $\mathbf{[-2; 3[}$. (1 pont)

b) $5 \cdot 3^x = 20$ (1 pont)
$3^x = 4$ (1 pont)
$x = \log_3 4$ (1 pont)
$\boldsymbol{x \approx 1{,}2619}$ (1 pont)

c) (A megadott egyenlet cos x-ben másodfokú,) így a megoldóképlet felhasználásával (1 pont)
$\cos x = 0{,}5$ vagy $\cos x = -2$. (2 pont)
Ez utóbbi nem lehetséges (mert a koszinuszfüggvény értékkészlete a $[-1; 1]$ intervallum). (1 pont)
A megadott halmazban a megoldások: $-\frac{\pi}{3}$, illetve $\frac{\pi}{3}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

14) Adja meg azoknak a 0° és 360° közötti α szögeknek a nagyságát, amelyekre igaz az alábbi egyenlőség!

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$ **(2 pont)**

Megoldás:

$\alpha_1 = 60°$ (1 pont)

$\alpha_2 = 300°$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

15) Adja meg azoknak a 0° és 360° közötti α szögeknek a nagyságát, amelyekre igaz az alábbi egyenlőség! **(2 pont)**

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Megoldás:

A számológépbe beírva 1 megoldást kapunk

$\alpha_1 = 45°$ (1 pont)

Viszont van egy másik megoldás is

$180° - \alpha_1 = \alpha_2 \quad \alpha_2 = 135°$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

16) Oldja meg a $[-\pi;\pi]$ zárt intervallumon a $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenletet! **(2 pont)**

Megoldás:

$x_1 = \frac{\pi}{3},\ x_2 = -\frac{\pi}{3}$ (2 pont)

17)

a) **Egy háromszög oldalainak hossza 5 cm, 7 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög 7 cm-es oldalával szemközti szöge?** **(4 pont)**

b) **Oldja meg a $[0;2\pi]$ intervallumon a következő egyenletet!**

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \quad (x \in \mathbb{R}).$$ **(6 pont)**

c) **Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)**

I) **Az $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ függvény páratlan függvény.**

II) **Az $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = \cos 2x$ függvény értékkészlete a $[-2;2]$ zárt intervallum.**

III) **A $h: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $h(x) = \cos x$ függvény szigorúan monoton növekszik a $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon.**

Megoldás:

a) (A kérdezett szöget α-val jelölve) alkalmazzuk a koszinusztételt: (1 pont)

$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos\alpha$ (1 pont)

Ebből $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, (1 pont)

azaz (mivel egy háromszög egyik szögéről van szó) $\alpha = 60°$ (1 pont)

b) Ha $\cos x = \frac{1}{2}$, (1 pont)

akkor a megadott intervallumon $x = \frac{\pi}{3}$, (1 pont)

vagy $x = \frac{5\pi}{3}$. (1 pont)

Ha $\cos x = -\frac{1}{2}$, (1 pont)

akkor a megadott intervallumon $x = \frac{2\pi}{3}$, (1 pont)

vagy $x = \frac{4\pi}{3}$. (1 pont)

c)

I) **igaz**

II) **hamis**

III) **hamis** (2 pont)

Összesen: 12 pont

18) **Adja meg a következő egyenlet $[0;2\pi]$ intervallumba eső megoldásának pontos értékét!**

$$\sin x = -1$$ **(2 pont)**

Megoldás:

$x = \frac{3}{2}\pi$ (2 pont)

19) Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett $x \to 1 + \cos x$ függvény értékkészletét! **(2 pont)**

Megoldás:

A függvény értékkészlete: $[0;2]$ (2 pont)

20) A
dja meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 1 + \sin x$ függvény értékkészletét! **(2 pont)**

***Megoldás*:**

Felírjuk a $\sin x$ függvény értékkészletét.

$-1 \le \sin x \le 1$

Ha az így kapott egyenlőtlenség minden oldalához hozzáadunk egyet, megkapjuk az $1 + \sin x$ függvény értékkészletét.

$0 \le 1 + \sin x \le 2$ (2 pont)

Tehát a megoldás $[0;2]$.

Összesen: 2 pont

21) O
ldja meg a $\sin x = 1$ egyenletet a valós számok halmazán! **(2 pont)**

***Megoldás*:**

$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$ (2 pont)

Összesen: 2 pont